Factorizando espacios de derivación a través de tipos intersección

Gonzalo Ciruelos
Director: Pablo Barenbaum

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

28 de junio de 2018

Espacios de derivación

Aritmética elemental y pares ordenados

$$
\begin{array}{rcll}
\underline{n} + \underline{m} & \to & \underline{n+m} & \\
\underline{n} \cdot t & \to & \underbrace{t + t + \ldots + t}_{n \text{ veces}} & \text{si } n > 0 \\
\underline{0} \cdot t & \to & \underline{0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
(t, s) & \to & (t', s) & \text{si } t \to t' \\
(t, s) & \to & (t, s') & \text{si } s \to s'
\end{array}
$$

Espacios de derivación

$$\mathbb{D}[\underline{1} + \underline{1}] = \left(\underline{1} + \underline{1} \to \underline{2} \right)$$

$$\mathbb{D}[\underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5})] = \begin{tikzcd}
\underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \underline{0} \cdot \underline{10} \arrow[dl] \\
& \underline{0} &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{D}[(\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5}))] = \begin{tikzcd}
(\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5})) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & (\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot \underline{10}) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& (\underline{1} + \underline{1}, \underline{0}) \arrow[dd] & \\
(\underline{2}, \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5})) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (\underline{2}, \underline{0} \cdot \underline{10}) \arrow[dl] \\
& (\underline{2}, \underline{0}) &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{D}[(A, B)] \simeq \mathbb{D}[A] \times \mathbb{D}[B]$$

El cálculo-λ

Términos del cálculo-λ

$$t ::= x \mid t\ t \mid \lambda x.t$$

Por ejemplo,

$\lambda x.x$

$(\lambda x.z)\ y$

$(\lambda x.\lambda y.x)\ z\ w = ((\lambda x.(\lambda y.x))\ z)\ w$

Variables libres

$$\begin{aligned}
\mathsf{fv}(x) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} x \\
\mathsf{fv}(u\ v) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathsf{fv}(u) \cup \mathsf{fv}(v) \\
\mathsf{fv}(\lambda x.u) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathsf{fv}(u) - \{x\}
\end{aligned}$$

El cálculo-λ

β-reducción

$$(\lambda x.t)\, s \to_\beta t\{x := s\}$$

...donde sustituir significa

$$\begin{array}{rcll}
x\{x := s\} & \stackrel{\text{def}}{=} & s & \\
y\{x := s\} & \stackrel{\text{def}}{=} & y & \\
(u\, v)\{x := s\} & \stackrel{\text{def}}{=} & u\{x := s\}\, v\{x := s\} & \\
(\lambda y.u)\{x := s\} & \stackrel{\text{def}}{=} & \lambda y.u\{x := s\} & \text{si } x \neq y \text{ e } y \notin \mathsf{fv}(s)
\end{array}$$

Por ejemplo

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y)z) \to (\lambda y.y)z \to z$$

Espacios de derivación en el cálculo-λ

$$\mathbb{D}[(\lambda x.x)((\lambda y.y)z)] = \begin{tikzcd} (\lambda x.x)((\lambda y.y)z) \arrow[r] \arrow[d] & (\lambda y.y)z \arrow[d] \\ (\lambda x.x)z \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

Espacios de derivación en el cálculo-λ – Problemas

Creación

$$
\begin{array}{rl}
\mathbb{D}[(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)] = & (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \downarrow \\
& (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \downarrow \\
& (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \downarrow \\
& \vdots
\end{array}
$$

$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)]$ es infinito, mientras que $\mathbb{D}[(\lambda x.xx)]$ es finito.

Espacios de derivación en el cálculo-λ – Problemas

Duplicación

$$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)\ (I\ z)] =$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\lambda x.xx)\ (I\ z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & (I\ z)\ (I\ z) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (\lambda x.xx)\ z \arrow[ddll, bend left] \\
z\ (I\ z) \arrow[dr] & & (I\ z)\ z \arrow[dl] & \\
 & z\ z & &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)\ (I\ z)] \not\approx \mathbb{D}[(\lambda x.xx)\ \square] \times \mathbb{D}[I\ z] = \underbrace{\Big((\lambda x.xx)\ \square \to \square\,\square\Big) \times \Big(I\ z \to z\Big)}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\
 & \bullet &
\end{tikzcd}$$

Espacios de derivación en el cálculo-λ – Problemas

Borrado

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{D}[(\lambda x.y)\ (I\ z)] = (\lambda x.y)\ (I\ z) \arrow[r] \arrow[dr] & (\lambda x.y)\ z \arrow[d] \\
 & y
\end{tikzcd}
$$

$$
\mathbb{D}[(\lambda x.y)\ (I\ z)] \not\simeq \mathbb{D}[(\lambda x.y)\ \square] \times \mathbb{D}[I\ z] = \underbrace{\Big((\lambda x.y)\ \square \to y\Big) \times \Big(I\ z \to z\Big)}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\
 & \bullet &
\end{tikzcd}
$$

Residuos en el cálculo-λ

Definición

Sean R, S dos pasos coiniciales. Definimos el residuo de R después de S como lo que queda de el paso R después de hacer S: es un conjunto de pasos que salen del target de S. Lo escribimos como R/S.
Formalmente, se puede definir con posiciones o etiquetas.

La definición se puede extender para derivaciones: ρ/σ es lo que queda de ρ después hacer hacer σ.

Para ordenar las derivaciones que salen de un mismo término, usamos el orden del prefijo.

Definición (Orden del prefijo)

$$[\rho] \sqsubseteq [\sigma] \overset{\text{def}}{\iff} \rho/\sigma = \epsilon$$

Espacios de derivación en el cálculo-λ

Definición (Equivalencia por permutaciones)

Decimos que dos secuencias de reducción ρ, σ son **equivalentes por permutación** si $\rho/\sigma = \epsilon$ y $\sigma/\rho = \epsilon$. Lo escribimos como $\rho \equiv \sigma$.

Definición (Espacio de derivación)

Si t es un término, $\mathbb{D}[t]$ es el conjunto de **secuencias de reducción** desde t:

$$\{\rho \mid \rho : t \to^* s \text{ es una secuencia de pasos de reescritura}\} \Big/ \equiv$$

Espacios de derivación en el cálculo-λ

Definición (Reticulado)

Un **reticulado** es un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ en el cual todo par de elementos tiene un supremo (mínima cota superior) y un ínfimo (máxima cota inferior).

Teorema (J.-J. Lévy)

En el cálculo-λ, $\mathbb{D}[t]$ forma un **semi-reticulado con supremos**, donde:

$$[\rho] \sqcup [\sigma] \stackrel{\text{def}}{=} [\rho(\sigma/\rho)]$$

$\mathbb{D}[t]$ no necesariamente es un reticulado.

Objetivo

Queremos **entender los espacios de derivación del cálculo-λ.**

Creemos que **explicitar el manejo de recursos puede ser útil.**

$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)[I\,z, I\,z]] =$

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.xx)[I\,z, I\,z] \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & (\lambda x.xx)[z, I\,z] \arrow[dl] \arrow[dd] \\
(\lambda x.xx)[I\,z, z] \arrow[rr] \arrow[dd] & & (\lambda x.xx)[z, z] \arrow[dd] & \\
 & (I\,z)\ (I\,z) \arrow[rr] \arrow[dl] & & z\ (I\,z) \arrow[dl] \\
(I\,z)\ z \arrow[rr] & & z\ z &
\end{tikzcd}$$

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

- En sistemas de tipos intersección, distintas ocurrencias ligadas de una misma variable pueden tener distintos tipos.
- La no-idempotencia de la intersección nos da la capacidad de manejar cómo se usan los recursos.
- Nos basamos en el sistema $\mathcal{W}$, un sistema de tipos intersección no-idempotente.

Idea:

```
def f(x):
  return x * x + x(100)
```

El parámetro se usa con dos tipos distintos. En consecuencia, el tipo de f es $[\mathsf{Int}, \mathsf{Int}, \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}] \to \mathsf{Int}$.

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Definición ($\lambda^{\#}$ "naïf")

Sintaxis

Términos	t	$::=$	$x^A \mid t\,\vec{t} \mid \lambda x.t$	Listas de términos	$\vec{t}$	$::=$	$[t_1, ..., t_n]$
Tipos	A	$::=$	$\alpha \mid \mathcal{M} \to A$	Multiconjuntos de tipos	$\mathcal{M}$	$::=$	$[A_1, ..., A_n]$
Contextos	Γ	$::=$	$(.) \mid \Gamma, x : \mathcal{M}$				

Tipado

$$\frac{}{x : [A] \vdash x^A : A} \qquad \frac{\Gamma \oplus x : \mathcal{M} \vdash t : A}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \mathcal{M} \to A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : [A_1, \dots, A_n] \to A \quad (\Delta_i \vdash s_i : A_i)_{i=1}^{n}}{\Gamma +_{i=1}^{n} \Delta_i \vdash t[s_1, \dots, s_n] : A}$$

Reducción

$$(\lambda x.t)[s_1, ..., s_n] \to_{\#} t\{x := [s_1, ..., s_n]\}$$

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Problema! (no es confluente)

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.(\lambda y.f\ y\ x)\ x)\ [a, b] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\lambda y.f\ y\ a)\ b \arrow[dr, dotted, two heads] & & (\lambda y.f\ y\ b)\ a \arrow[dl, dotted, two heads] \\
 & ? &
\end{tikzcd}
$$

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Definición ($\lambda^{\#}$)

Sintaxis

Términos	t	$::=$	$x^A \mid t\,\vec{t} \mid \lambda^{\ell} x.t$	Listas de términos	$\vec{t}$	$::=$	$[t_1, \ldots, t_n]$
Tipos	A	$::=$	$\alpha^{\ell} \mid \mathcal{M} \xrightarrow{\ell} A$	Multiconjuntos de tipos	$\mathcal{M}$	$::=$	$[A_1, \ldots, A_n]$
Contextos	Γ	$::=$	$(.) \mid \Gamma, x : \mathcal{M}$				

Tipado

$$\frac{}{x : [A] \vdash x^A : A} \qquad \frac{\Gamma \oplus x : \mathcal{M} \vdash t : A}{\Gamma \vdash \lambda^{\ell} x.t : \mathcal{M} \xrightarrow{\ell} A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : [A_1, \ldots, A_n] \xrightarrow{\ell} B \quad (\Delta_i \vdash s_i : A_i)_{i=1}^{n}}{\Gamma +_{i=1}^{n} \Delta_i \vdash t[s_1, \ldots, s_n] : B}$$

Reducción

$$(\lambda x.t)[s_1, \ldots, s_n] \xrightarrow{\ell}_{\#} t\{x := [s_1, \ldots, s_n]\}$$

La reducción es orientada por tipos.

Ejemplo de término. $(\lambda^1 x.x^{\alpha^2})\,[y^{\alpha^2}]$

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Definición (Términos correctos)

Decimos que un término tipable t es **correcto** si:

- Distintos lambdas tienen distintas etiquetas.
- Para todo multiconjunto de tipos $[A_1, ..., A_n]$ que ocurra como una subfórmula en cualquier lugar de la derivación de tipos de t, si $i \neq j$ entonces A_i y A_j están decorados con distintas etiquetas en la raíz.

Comentario (Tipado único)

Si $\Gamma \vdash t : A$ es derivable y t correcto, entonces es la única derivación de tipo para t.

Lema (*Subject reduction*)

Si $\Gamma \vdash t : A$, el término t es correcto y $t \to_{\#} s$, entonces $\Gamma \vdash s : A$ y s es correcto.

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Proposición (Confluencia)

El cálculo-$\lambda^{\#}$ cumple la propiedad de Church–Rosser.

En el ejemplo que antes no funcionaba:

$$\begin{tikzcd}
(\lambda^1 x.(\lambda^2 y.f^3\,[x^4, y^5])[x^5])\ [a^5, b^4] \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & (\lambda^2 y.f^3\,[b^4, y^5])[a^5] \arrow[d, "2"] \\
(\lambda^1 x.f^3\,[x^4, x^5])\ [a^5, b^4] \arrow[r, "1"] & f^3\,[b^4, a^5]
\end{tikzcd}$$

El cálculo-λ distributivo ($\lambda^{\#}$)

Proposición (Fuertemente normalizante)

No hay secuencias de reducción infinitas: $t_1 \to_{\#} t_2 \to_{\#} \ldots$.

Definición (Residuo)

Los **residuos** pueden definirse en $\lambda^{\#}$ utilizando las etiquetas de los lambdas.

Proposición (Ortogonalidad [cf. P.-A. Melliès])

El cálculo-$\lambda^{\#}$ es un sistema de reescritura abstracto ortogonal.

Lema

No hay duplicación ni borrado en $\lambda^{\#}$.

Proposición

En el cálculo-$\lambda^{\#}$, $\mathbb{D}[t]$ es un reticulado distributivo, a saber:

- existen supremos e ínfimos para cada par de reducciones, y
- las operaciones de *join* ($\sqcup$) y *meet* ($\sqcap$) distribuyen una sobre la otra.

Simulación

Definición (Refinamiento)

Damos una forma de relacionar términos correctos del cálculo-$\lambda^{\#}$ y el cálculo-λ.

$$\frac{}{x^{\tau} \ltimes x} \qquad \frac{t' \ltimes t}{\lambda^{\ell} x.t' \ltimes \lambda x.t} \qquad \frac{t' \ltimes t \qquad s_i \ltimes s \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}}{t'[s_1, \ldots, s_n] \ltimes t\, s}$$

Un término λ puede tener muchos refinamientos:

$$\lambda^1 x.x^2\,[\,] \ltimes \lambda x.x\,x$$

$$\lambda^1 x.x^2\,[x^3] \ltimes \lambda x.x\,x$$

$$\lambda^1 x.x^2\,[x^3, x^4] \ltimes \lambda x.x\,x$$

$$\ldots$$

También puede no tener ninguno, como $\Omega = (\lambda x.x\,x)\ (\lambda x.x\,x)$.

Simulación

Proposición (Simulación)

Del λ por el $\lambda^{\#}$. Si $t' \ltimes t \to_\beta s$, entonces existe s' tal que:

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\ltimes"] & s \arrow[d, phantom, "\ltimes"] \\
t' \arrow[r, dotted, two heads, "\#"] & s'
\end{tikzcd}$$

Del $\lambda^{\#}$ por el λ. Si $t \rtimes t' \to_{\#} s'$, entonces existen s y s'' tal que:

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, dotted, two heads, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\ltimes"] & & s \arrow[d, phantom, "\ltimes"] \\
t' \arrow[r, "\#"] & s' \arrow[r, dotted, two heads, "\#"] & s''
\end{tikzcd}$$

Simulación – *Head normal forms*

Definición (*Head normal form*)

Un término del cálculo-λ está en **head normal form** si no tiene redexes debajo de un contexto head:

$$\mathtt{H} ::= \Box \mid \lambda x.\mathtt{H} \mid \mathtt{H}\, t$$

Se define análogamente para el cálculo-$\lambda^{\#}$.

Proposición (La refinabilidad caracteriza la tenencia de *head normal forms*)

Dado t un término del cálculo-λ, son equivalentes:

1. El término t tiene una *head normal form*.
2. Existe un término t' del cálculo-$\lambda^{\#}$ tal que $t' \ltimes t$.

Simulación

Proposición (Simulación algebraica)

Para cada refinamiento $t' \ltimes t$, la construcción dada por el resultado anterior es un morfismo de semirreticulados:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}[t] & \to & \mathbb{D}[t'] \\ \rho & \mapsto & \rho/t' \end{array}$$

Ejemplo. Sean $I = \lambda x.x$ y $t = (\lambda x.xx)\,(I\,z)$. Es refinado por $t' = (\lambda^1 x.x^2[\,])[(\lambda^5 x.x^2)[z^2]]$.

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.xx)\,(I\,z) \arrow[dl, bend right, "R_1"'] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
(I\,z)\,(I\,z) \arrow[r, "S_{21}"] \arrow[d, "S_{11}"'] & (Iz)z \arrow[d, "S_{12}"] & (\lambda x.xx)z \arrow[dl, bend left, "R_2"] \\
z(Iz) \arrow[r, "S_{22}"'] & zz &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\lambda^1 x.x^2[\,])[(\lambda^5 x.x^2)[z^2]] \arrow[dl, bend right, "R_1'"'] \arrow[dr, bend left, "S'"] & \\
(\lambda^5 x.x^2)[z^2][\,] \arrow[dr, bend right, "S_1'"'] & & (\lambda^1 x.x^2[\,])[z^2] \arrow[dl, bend left, "R_2'"] \\
 & z^2[\,] &
\end{tikzcd}$$

Basura

Definición (Basura)

Sea $t' \ltimes t$. Una derivación $\rho : t \to_{\beta}^{*} s$ es t'-**basura** si $\rho / t' = \epsilon$.

Definición (Libre de basura)

Sea $t' \ltimes t$. Una derivación $\rho : t \to_{\beta}^{*} s$ es t'-**libre de basura** si para cada $\sigma \sqsubseteq \rho$, si ρ/σ es (t'/σ)-basura, entonces $\rho/\sigma = \epsilon$.

Notemos que las definiciones dependen de la elección de t'.

Ejemplo. Los pasos punteados son basura.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.xx)\,(I\,z) \rtimes (\lambda^1 x.x^2[\,])[(\lambda^5 x.x^2)[z^2]] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(I\,z)\,(I\,z) \rtimes (\lambda^5 x.x^2)[z^2][\,] \arrow[r, dotted] \arrow[d] & (Iz)z \rtimes (\lambda^5 x.x^2)[z^2][\,] \arrow[d] & (\lambda x.xx)z \rtimes (\lambda^1 x.x^2[\,])[z^2] \arrow[dl] \\
z(Iz) \rtimes z^2[\,] \arrow[r, dotted] & zz \rtimes z^2[\,] &
\end{tikzcd}
$$

Basura y factorización

Teorema (Factorización)

Si $t' \ltimes t$, existe un isomorfismo de semirreticulados:

$$\mathbb{D}[t] \simeq \int_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$$

donde:

- $\mathcal{F}$ es el reticulado de derivaciones t'-libres de basura.
- $\mathcal{G} : \mathcal{F} \to \mathsf{Semilattice}$ es un funtor que a cada derivación libre de basura $\rho : t \to_{\beta}^{*} s$ en $\mathcal{F}$ le asigna el semirreticulado de derivaciones basura que salen de s (que son las (t'/ρ)-basura).
- $\int_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ es la construcción de Grothendieck.

Corolario

Toda derivación ρ de t se puede factorizar de manera única en $\rho \equiv \rho_1 \rho_2$ donde ρ_1 es libre de basura y ρ_2 es basura.

Factorización – Ejemplo

Sea $t = (\lambda x.xx)\,(I\,z)$. Lo refinaba $t' = (\lambda^1 x.x^2[\,])[(\lambda^5 x.x^2)[z^2]]$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda x.xx)\,(I\,z) \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[dr, "S"] & \\
(I\,z)\,(I\,z) \arrow[r, dotted, "S_{21}"] \arrow[d, "S_{11}"'] & (Iz)z \arrow[d, "S_{12}"] & (\lambda x.xx)z \arrow[dl, "R_2"] \\
z(Iz) \arrow[r, dotted, "S_{22}"'] & zz &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\lambda^1 x.x^2[\,])[(\lambda^5 x.x^2)[z^2]] \arrow[dl, "R_1'"'] \arrow[dr, "S'"] & \\
(\lambda^5 x.x^2)[z^2][\,] \arrow[dr, "S_1'"'] & & (\lambda^1 x.x^2[\,])[z^2] \arrow[dl, "R_2'"] \\
 & z^2[\,] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & ([\epsilon],[\epsilon]) \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[dr, "S"] & \\
([R_1],[\epsilon]) \arrow[r, dotted, "S_{21}"] \arrow[d, "S_{11}"'] & ([R_1],[S_{21}]) \arrow[d, "S_{12}"] & ([S],[\epsilon]) \arrow[dl, "R_2"] \\
([R_1 S_{11}],[\epsilon]) \arrow[r, dotted, "S_{22}"'] & ([R_1 S_{11}],[S_{22}]) &
\end{tikzcd}
$$

Trabajo futuro

- Estudiar la relación de los términos que refinan a un t con la noción de aproximantes de *head normal forms*.
- Intentar hacer lo mismo con otros cálculos de recursos.
- Relacionar que la factorización dada con la factorización interna–externa de Melliés.
- Obtener resultados cuantitativos con la teoría desarrollada.