

# Factorizando espacios de derivación a través de tipos intersección

Gonzalo Ciruelos  
Director: Pablo Barenbaum

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

28 de junio de 2018

# Espacios de derivación

## Aritmética elemental y pares ordenados

$$\begin{aligned}\underline{n} + \underline{m} &\rightarrow \underline{n + m} \\ \underline{n} \cdot \underline{t} &\rightarrow \underbrace{\underline{t + t + \dots + t}}_{n \text{ veces}} \quad \text{si } n > 0 \\ \underline{0} \cdot \underline{t} &\rightarrow \underline{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t, s) &\rightarrow (t', s) && \text{si } t \rightarrow t' \\ (t, s) &\rightarrow (t, s') && \text{si } s \rightarrow s'\end{aligned}$$

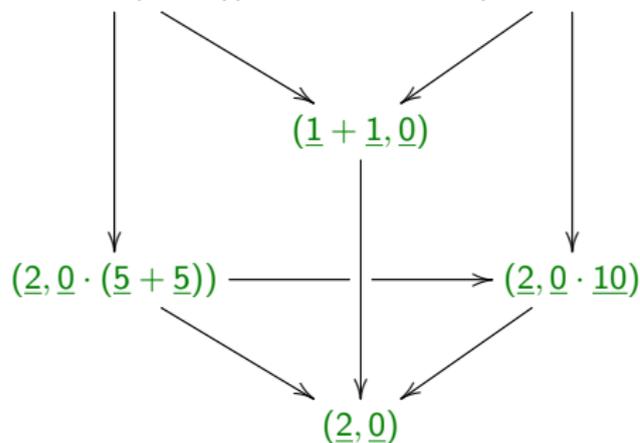
## Espacios de derivación

$$\mathbb{D}[\underline{1} + \underline{1}] = \left( \underline{1} + \underline{1} \rightarrow \underline{2} \right)$$

$$\mathbb{D}[\underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5})] = \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5}) \longrightarrow \underline{0} \cdot \underline{10}$$

$\underline{0}$

$$\mathbb{D}[(\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5}))] = (\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot (\underline{5} + \underline{5})) \longrightarrow (\underline{1} + \underline{1}, \underline{0} \cdot \underline{10})$$



$$\mathbb{D}[(A, B)] \simeq \mathbb{D}[A] \times \mathbb{D}[B]$$

# El cálculo- $\lambda$

## Términos del cálculo- $\lambda$

$$t ::= x \mid t t \mid \lambda x. t$$

Por ejemplo,

$\lambda x. x$

$(\lambda x. z) y$

$(\lambda x. \lambda y. x) z w = ((\lambda x. (\lambda y. x)) z) w$

## Variables libres

$$\text{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$$

$$\text{fv}(u v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{fv}(u) \cup \text{fv}(v)$$

$$\text{fv}(\lambda x. u) \stackrel{\text{def}}{=} \text{fv}(u) - \{x\}$$

# El cálculo- $\lambda$

## $\beta$ -reducción

$$(\lambda x.t) s \rightarrow_{\beta} t\{x := s\}$$

...donde sustituir significa

$$x\{x := s\} \stackrel{\text{def}}{=} s$$

$$y\{x := s\} \stackrel{\text{def}}{=} y$$

$$(uv)\{x := s\} \stackrel{\text{def}}{=} u\{x := s\} v\{x := s\}$$

$$(\lambda y.u)\{x := s\} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda y.u\{x := s\} \quad \text{si } x \neq y \text{ e } y \notin \text{fv}(s)$$

Por ejemplo

$$(\lambda x.x)((\lambda y.y)z) \rightarrow (\lambda y.y)z \rightarrow z$$

## Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$

$$\mathbb{D}[(\lambda x.x)((\lambda y.y)z)] = \begin{array}{ccc} (\lambda x.x)((\lambda y.y)z) & \longrightarrow & (\lambda y.y)z \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\lambda x.x)z & \longrightarrow & z \end{array}$$

# Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$ – Problemas

## Creación

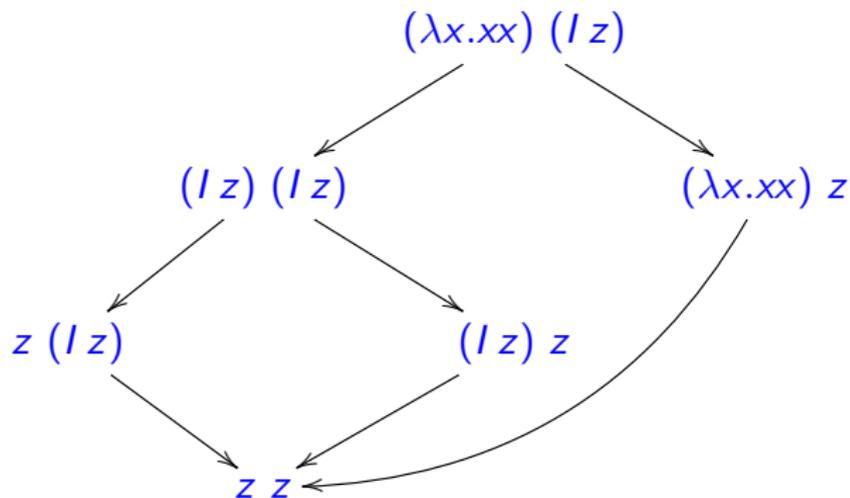
$$\begin{aligned} \mathbb{D}[(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)] &= (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\ &\downarrow \\ &(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\ &\downarrow \\ &(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\ &\downarrow \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)]$  es infinito, mientras que  $\mathbb{D}[(\lambda x.xx)]$  es finito.

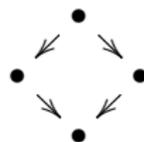
# Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$ – Problemas

## Duplicación

$$\mathbb{D}[(\lambda x.xx) (I z)] =$$



$$\mathbb{D}[(\lambda x.xx) (I z)] \not\cong \mathbb{D}[(\lambda x.xx) \square] \times \mathbb{D}[I z] = \underbrace{\left( (\lambda x.xx) \square \rightarrow \square \square \right)}_{\text{Diagram}} \times \left( I z \rightarrow z \right)$$



# Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$ – Problemas

## Borrado

$$\mathbb{D}[(\lambda x.y) (I z)] = (\lambda x.y) (I z) \longrightarrow (\lambda x.y) z$$

A triangular diagram with two arrows pointing from the middle terms  $(\lambda x.y) (I z)$  and  $(\lambda x.y) z$  to the variable  $y$ .

$$\mathbb{D}[(\lambda x.y) (I z)] \not\cong \mathbb{D}[(\lambda x.y) \square] \times \mathbb{D}[I z] = \underbrace{\left( (\lambda x.y) \square \rightarrow y \right) \times \left( I z \rightarrow z \right)}_{\text{Diagram}}$$

A diagram showing four nodes in a diamond shape with arrows pointing towards a central node.

# Residuos en el cálculo- $\lambda$

## Definición

Sean  $R$ ,  $S$  dos pasos coiniciales. Definimos el residuo de  $R$  después de  $S$  como lo que queda de el paso  $R$  después de hacer  $S$ : es un conjunto de pasos que salen del target de  $S$ . Lo escribimos como  $R/S$ .

Formalmente, se puede definir con posiciones o etiquetas.

La definición se puede extender para derivaciones:  $\rho/\sigma$  es lo que queda de  $\rho$  después hacer  $\sigma$ .

Para ordenar las derivaciones que salen de un mismo término, usamos el orden del prefijo.

## Definición (Orden del prefijo)

$$[\rho] \sqsubseteq [\sigma] \stackrel{\text{def}}{\iff} \rho/\sigma = \epsilon$$

# Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$

## Definición (Equivalencia por permutaciones)

Decimos que dos secuencias de reducción  $\rho, \sigma$  son **equivalentes por permutación** si  $\rho/\sigma = \epsilon$  y  $\sigma/\rho = \epsilon$ . Lo escribimos como  $\rho \equiv \sigma$ .

## Definición (Espacio de derivación)

Si  $t$  es un término,  $\mathbb{D}[t]$  es el conjunto de **secuencias de reducción** desde  $t$ :

$$\{\rho \mid \rho : t \rightarrow^* s \text{ es una secuencia de pasos de reescritura}\} / \equiv$$

# Espacios de derivación en el cálculo- $\lambda$

## Definición (Reticulado)

Un **reticulado** es un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  en el cual todo par de elementos tiene un supremo (mínima cota superior) y un ínfimo (máxima cota inferior).

## Teorema (J.-J. Lévy)

En el cálculo- $\lambda$ ,  $\mathbb{D}[t]$  forma un **semi-reticulado con supremos**, donde:

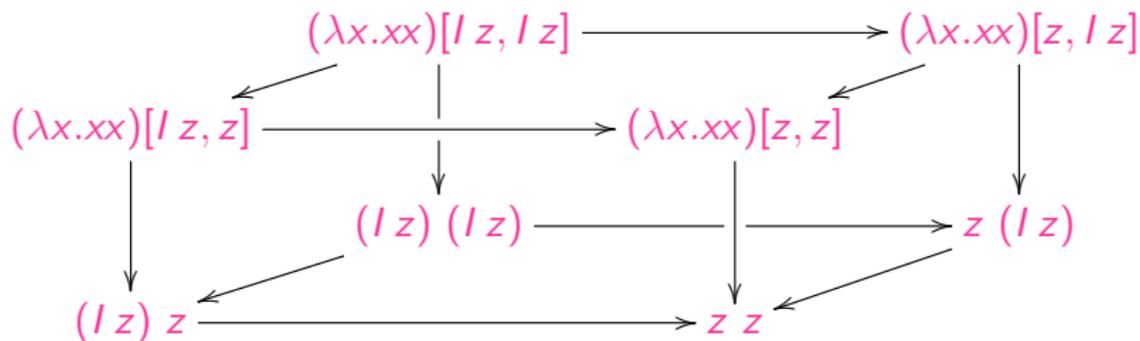
$$[\rho] \sqcup [\sigma] \stackrel{\text{def}}{=} [\rho(\sigma/\rho)]$$

$\mathbb{D}[t]$  no necesariamente es un reticulado.

# Objetivo

Queremos **entender los espacios de derivación del cálculo- $\lambda$** .  
Creemos que **explicitar el manejo de recursos puede ser útil**.

$$\mathbb{D}[(\lambda x.xx)[I z, I z]] =$$



## El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

- ▶ En sistemas de tipos intersección, distintas ocurrencias ligadas de una misma variable pueden tener distintos tipos.
- ▶ La no-idempotencia de la intersección nos da la capacidad de manejar cómo se usan los recursos.
- ▶ Nos basamos en el sistema  $\mathcal{W}$ , un sistema de tipos intersección no-idempotente.

**Idea:**

```
def f(x):  
    return x * x + x(100)
```

El parámetro se usa con dos tipos distintos. En consecuencia, el tipo de  $f$  es  $[\text{Int}, \text{Int}, \text{Int} \rightarrow \text{Int}] \rightarrow \text{Int}$ .

# El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

## Definición ( $\lambda^\#$ “naïf”)

### Sintaxis

Términos	$t ::= x^A \mid t \vec{t} \mid \lambda x.t$	Listas de términos	$\vec{t} ::= [t_1, \dots, t_n]$
Tipos	$A ::= \alpha \mid \mathcal{M} \rightarrow A$	Multiconjuntos de tipos	$\mathcal{M} ::= [A_1, \dots, A_n]$
Contextos	$\Gamma ::= (\cdot) \mid \Gamma, x : \mathcal{M}$		

### Tipado

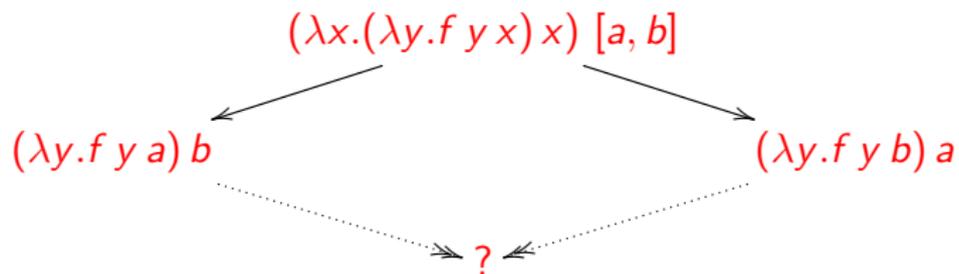
$$\frac{}{x : [A] \vdash x^A : A} \quad \frac{\Gamma \oplus x : \mathcal{M} \vdash t : A}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \mathcal{M} \rightarrow A} \quad \frac{\Gamma \vdash t : [A_1, \dots, A_n] \rightarrow A \quad (\Delta_j \vdash s_j : A_j)_{j=1}^n}{\Gamma +_{i=1}^n \Delta_j \vdash t[s_1, \dots, s_n] : A}$$

### Reducción

$$(\lambda x.t)[s_1, \dots, s_n] \rightarrow_\# t\{x := [s_1, \dots, s_n]\}$$

# El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

**Problema! (no es confluente)**



# El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

## Definición ( $\lambda^\#$ )

### Sintaxis

Términos	$t ::= x^A \mid t \vec{t} \mid \lambda^\ell x.t$	Listas de términos	$\vec{t} ::= [t_1, \dots, t_n]$
Tipos	$A ::= \alpha^\ell \mid \mathcal{M} \xrightarrow{\ell} A$	Multiconjuntos de tipos	$\mathcal{M} ::= [A_1, \dots, A_n]$
Contextos	$\Gamma ::= (\cdot) \mid \Gamma, x : \mathcal{M}$		

### Tipado

$$\frac{}{x : [A] \vdash x^A : A} \quad \frac{\Gamma \oplus x : \mathcal{M} \vdash t : A}{\Gamma \vdash \lambda^\ell x.t : \mathcal{M} \xrightarrow{\ell} A} \quad \frac{\Gamma \vdash t : [A_1, \dots, A_n] \xrightarrow{\ell} B \quad (\Delta_i \vdash s_i : A_i)_{i=1}^n}{\Gamma +_{i=1}^n \Delta_i \vdash t[s_1, \dots, s_n] : B}$$

### Reducción

$$(\lambda x.t)[s_1, \dots, s_n] \xrightarrow{\ell}_{\#} t\{x := [s_1, \dots, s_n]\}$$

La reducción es orientada por tipos.

**Ejemplo de término.**  $(\lambda^1 x.x^{\alpha^2}) [y^{\alpha^2}]$

# El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

## Definición (Términos correctos)

Decimos que un término tipable  $t$  es **correcto** si:

- ▶ Distintos lambdas tienen distintas etiquetas.
- ▶ Para todo multiconjunto de tipos  $[A_1, \dots, A_n]$  que ocurra como una subfórmula en cualquier lugar de la derivación de tipos de  $t$ , si  $i \neq j$  entonces  $A_i$  y  $A_j$  están decorados con distintas etiquetas en la raíz.

## Comentario (Tipado único)

Si  $\Gamma \vdash t : A$  es derivable y  $t$  correcto, entonces es la única derivación de tipo para  $t$ .

## Lema (*Subject reduction*)

Si  $\Gamma \vdash t : A$ , el término  $t$  es correcto y  $t \rightarrow_\# s$ , entonces  $\Gamma \vdash s : A$  y  $s$  es correcto.

# El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

## Proposición (Confluencia)

El cálculo- $\lambda^\#$  cumple la propiedad de Church–Rosser.

**En el ejemplo que antes no funcionaba:**

$$\begin{array}{ccc} (\lambda^1 x. (\lambda^2 y. f^3 [x^4, y^5])[x^5]) [a^5, b^4] & \xrightarrow{1} & (\lambda^2 y. f^3 [b^4, y^5])[a^5] \\ \downarrow 2 & & \downarrow 2 \\ (\lambda^1 x. f^3 [x^4, x^5]) [a^5, b^4] & \xrightarrow{1} & f^3 [b^4, a^5] \end{array}$$

## El cálculo- $\lambda$ distributivo ( $\lambda^\#$ )

### Proposición (Fuertemente normalizante)

No hay secuencias de reducción infinitas:  $t_1 \rightarrow_\# t_2 \rightarrow_\# \dots$

### Definición (Residuo)

Los **residuos** pueden definirse en  $\lambda^\#$  utilizando las etiquetas de los lambdas.

### Proposición (Ortogonalidad [cf. P.-A. Melliès])

El cálculo- $\lambda^\#$  es un sistema de reescritura abstracto ortogonal.

### Lema

No hay duplicación ni borrado en  $\lambda^\#$ .

### Proposición

En el cálculo- $\lambda^\#$ ,  $\mathbb{D}[t]$  es un reticulado distributivo, a saber:

- ▶ existen supremos e ínfimos para cada par de reducciones, y
- ▶ las operaciones de *join* ( $\sqcup$ ) y *meet* ( $\sqcap$ ) distribuyen una sobre la otra.

# Simulación

## Definición (Refinamiento)

Damos una forma de relacionar términos correctos del cálculo- $\lambda^\#$  y el cálculo- $\lambda$ .

$$\frac{}{x^\tau \times x} \quad \frac{t' \times t}{\lambda^\ell x.t' \times \lambda x.t} \quad \frac{t' \times t \quad s_i \times s \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}}{t'[s_1, \dots, s_n] \times t s}$$

Un término  $\lambda$  puede tener muchos refinamientos:

$$\lambda^1 x.x^2 [ ] \times \lambda x.x x$$

$$\lambda^1 x.x^2 [x^3] \times \lambda x.x x$$

$$\lambda^1 x.x^2 [x^3, x^4] \times \lambda x.x x$$

...

También puede no tener ninguno, como  $\Omega = (\lambda x.x x) (\lambda x.x x)$ .

# Simulación

## Proposición (Simulación)

**Del  $\lambda$  por el  $\lambda^\#$ .** Si  $t' \times t \rightarrow_\beta s$ , entonces existe  $s'$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\beta} & s \\ \times & & \times \\ t' & \xrightarrow{\#} & s' \end{array}$$

**Del  $\lambda^\#$  por el  $\lambda$ .** Si  $t \times t' \rightarrow_\# s'$ , entonces existen  $s$  y  $s''$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\beta} & s \\ \times & & \times \\ t' & \xrightarrow{\#} s' & \xrightarrow{\#} s'' \end{array}$$

## Simulación – *Head normal forms*

### Definición (*Head normal form*)

Un término del cálculo- $\lambda$  está en **head normal form** si no tiene redexes debajo de un contexto head:

$$H ::= \square \mid \lambda x.H \mid H t$$

Se define análogamente para el cálculo- $\lambda^\#$ .

### Proposición (La refinabilidad caracteriza la tenencia de *head normal forms*)

Dado  $t$  un término del cálculo- $\lambda$ , son equivalentes:

1. El término  $t$  tiene una *head normal form*.
2. Existe un término  $t'$  del cálculo- $\lambda^\#$  tal que  $t' \times t$ .

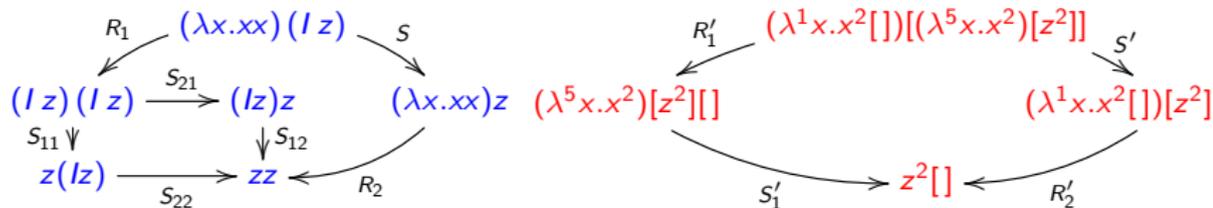
# Simulación

## Proposición (Simulación algebraica)

Para cada refinamiento  $t' \times t$ , la construcción dada por el resultado anterior es un morfismo de semirreticulados:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}[t] &\rightarrow \mathbb{D}[t'] \\ \rho &\mapsto \rho/t' \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Sean  $l = \lambda x.x$  y  $t = (\lambda x.xx)(l z)$ . Es refinado por  $t' = (\lambda^1 x.x^2[]) [(\lambda^5 x.x^2)[z^2]]$ .



# Basura

## Definición (Basura)

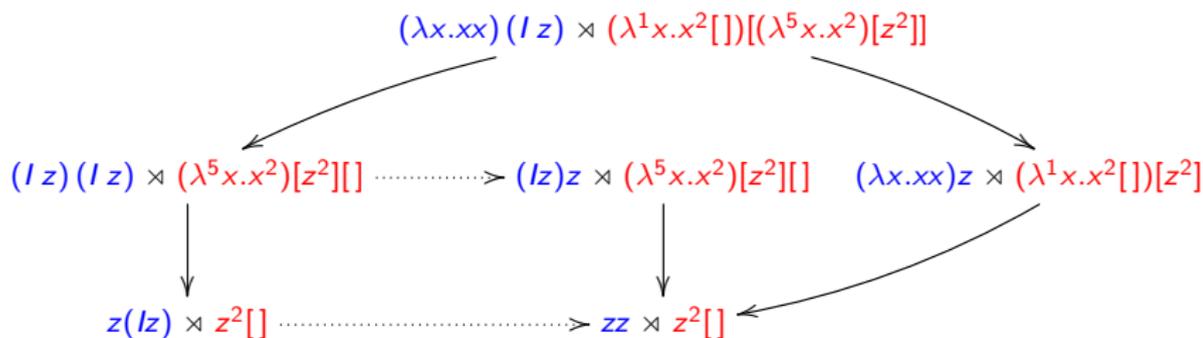
Sea  $t' \times t$ . Una derivación  $\rho : t \rightarrow_{\beta}^* s$  es  **$t'$ -basura** si  $\rho/t' = \epsilon$ .

## Definición (Libre de basura)

Sea  $t' \times t$ . Una derivación  $\rho : t \rightarrow_{\beta}^* s$  es  **$t'$ -libre de basura** si para cada  $\sigma \sqsubseteq \rho$ , si  $\rho/\sigma$  es  $(t'/\sigma)$ -basura, entonces  $\rho/\sigma = \epsilon$ .

Notemos que las definiciones dependen de la elección de  $t'$ .

**Ejemplo.** Los pasos punteados son basura.



# Basura y factorización

## Teorema (Factorización)

Si  $t' \times t$ , existe un isomorfismo de semirreticulados:

$$\mathbb{D}[t] \simeq \int_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$$

donde:

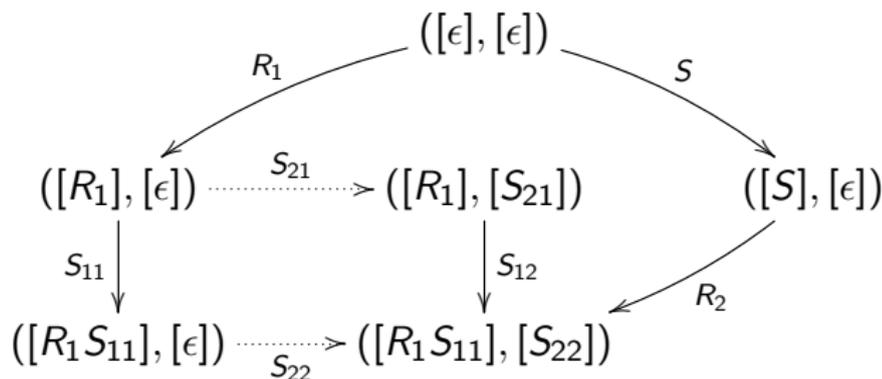
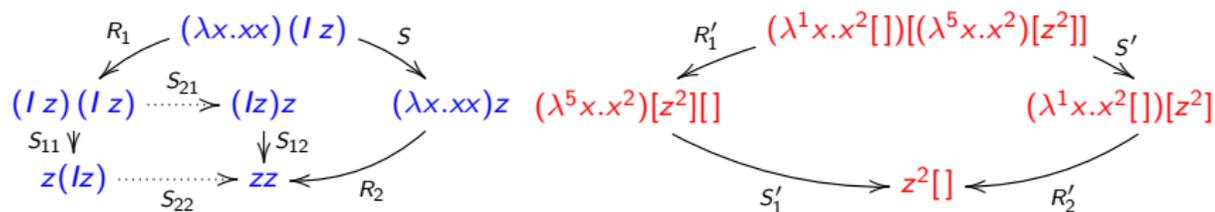
- ▶  $\mathcal{F}$  es el reticulado de derivaciones  $t'$ -libres de basura.
- ▶  $\mathcal{G} : \mathcal{F} \rightarrow \text{Semilattice}$  es un funtor que a cada derivación libre de basura  $\rho : t \rightarrow_{\beta}^* s$  en  $\mathcal{F}$  le asigna el semirreticulado de derivaciones basura que salen de  $s$  (que son las  $(t'/\rho)$ -basura).
- ▶  $\int_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$  es la construcción de Grothendieck.

## Corolario

Toda derivación  $\rho$  de  $t$  se puede factorizar de manera única en  $\rho \equiv \rho_1 \rho_2$  donde  $\rho_1$  es libre de basura y  $\rho_2$  es basura.

## Factorización – Ejemplo

Sea  $t = (\lambda x.xx)(Iz)$ . Lo refinaba  $t' = (\lambda^1 x.x^2[]) [(\lambda^5 x.x^2)[z^2]]$ .



## Trabajo futuro

- ▶ Estudiar la relación de los términos que refinan a un  $t$  con la noción de aproximantes de *head normal forms*.
- ▶ Intentar hacer lo mismo con otros cálculos de recursos.
- ▶ Relacionar que la factorización dada con la factorización interna–externa de Melliés.
- ▶ Obtener resultados cuantitativos con la teoría desarrollada.